



Menú principal

Inicio

[Antecedentes](#)
[Ediciones Anteriores](#)
[Galería de Imágenes](#)
[Biblioteca](#)
[Normas de Publicación](#)
[Contacto](#)
[Suscripciones](#)

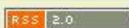
Responsables

DEPARTAMENTO DE
INGENIERIA INDUSTRIAL
 Universidad del Bío-Bío, Chile



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

Agregar a Favoritos



Más descargados

- Evaluación Económica de Proyectos de Inversión Basada en la Teoría de Opciones Reales
- Instrucciones Generales a los Autores para la Presentación de trabajos
- Residuos Sólidos Domiciliarios: Logística, una Herramienta Moderna para

Inicio

En circulación nueva edición impresa de Revista Ingeniería Industrial

Está en circulación la edición impresa de la Revista Ingeniería Industrial, N° 7, correspondiente al año 2008. Esta es una revista de divulgación científica, responsabilidad del Departamento de Ingeniería Industrial, Facultad de Ingeniería de la Universidad del Bío-Bío, Chile.

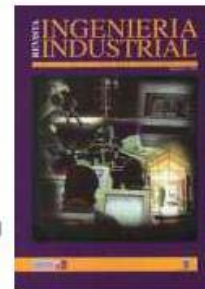
El contenido del número que acaba de aparecer es:

Editorial

Propuesta Metodológica para el Análisis de Competitividad Empresarial en la Pequeña y Mediana Agroindustria Alimentaria.
 Girán, R.; Vargas, H.; Osta, K.

Perfil del Consumidor de Vino Orgánico en la Región del Bío-Bío
 Jelvez, A.; Gallardo, O.

[Leer más...](#)



La Revista Ingeniería Industrial se encuentra disponible a texto completo en la Base de Datos EBSCO



Todos los trabajos publicados en la Revista Ingeniería Industrial, desde el año 2001 a la fecha, se encuentran indexados en EBSCO a "full text", situación que se logró, junto con otras 8 revistas de la Universidad, luego de una revisión por parte de EBSCO y firma de un Contrato de Licencias de Contenidos en Agosto de 2005.

Nuevos Integrantes al Comité Editorial Internacional

La Revista Ingeniería Industrial continuando su línea de mejoramiento continuo para convertirse en una Revista de Divulgación Científica y Académica ha ampliado su Comité Editorial incorporando prestigiosos académicos e investigadores en la disciplina, quienes han aceptado su nominación y compromiso su trabajo, entre los nuevos integrantes del Comité Editorial se encuentran:



Modelo de dinámica lateral de vehículo mediante Bond Graph

Juan Carlos Parra Márquez¹
Joseph Tornero Monserrat²

RESUMEN

Este trabajo presenta los resultados de la investigación cuyo objetivo es obtener un modelo matemático que permita determinar la dinámica lateral de un vehículo mediante el uso de Bond Graph. Este modelo es válido para robótica móvil.

Los análisis de comportamiento del modelo han sido probadas con simulaciones típicas del movimiento lateral de un vehículo. Finalmente, este modelo ha sido obtenido e implementado mediante el software 20-Sim.

Palabras Claves: Bond Graph, Dinámica lateral de vehiculo, Mecánica, Modelo Matemático.

ABSTRACT

This paper presents the results of a research whose objective was to find a mathematical model in order to determine the lateral dynamic of Vehicle by means of the use of Bond Graph. This model is valid also for mobile robotics.

The analyses of behavior of the model were realized across typical simulations of a vehicle in lateral movement. Finally, this mathematical model was obtained and implemented across the software 20-Sim.

Key Words: Bond Graph, Lateral Dynamic Vehicle, Mechanics, Mathematical Model.

¹ Departamento de Sistemas de Información, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad del Bío-Bío, Concepción, Chile, C.P. 4081112, teléfono: (56)(41)2731521.
e-mail: jparra@ubiobio.cl

² Departamento de Ing. de Sistemas y Automática, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.
e-mail: jtornero@isa.upv.es

1. INTRODUCCIÓN

La simulación de sistemas dinámicos constituye un tema de sumo interés para la ingeniería actual debido a la creciente complejidad que han ido adquiriendo dichos sistemas que son diseñados mediante una variedad de componentes que involucran áreas como la mecánica, la electricidad, hidráulica, entre otras; por ello, es frecuente encontrar la necesidad de modelar el comportamiento de máquinas, tales como un vehículo automóvil, que plantean la necesidad de representar la interacción entre diversos dominios de la física, producto del acoplamiento de diversos componentes constituyentes de esta máquina.

Comúnmente, los análisis dinámicos de sistemas acoplados se han concentrado esencialmente en sistemas multicuerpos (en inglés, multibody) formados por múltiples parámetros y que configuran el modelo del mismo (Chiang, 1999) y, por esto, la dinámica de sistemas multicuerpos es la teoría que permite el análisis cinemática y dinámico de estos mecanismos. El enfoque tradicional es considerar un sistema, mecánico para nuestro caso, como un conjunto de elementos rígidos indeformables, móviles unos con respecto a otros, unidos entre sí mediante diferentes tipos de uniones, llamadas pares cinemáticas (pernos, uniones de contacto, pasadores, etc.), cuyo propósito es la transmisión de movimientos y fuerzas.

Un mecanismo destacable del siglo XX ha sido el automóvil que ha servido de medio de progreso a la humanidad de tal forma que ha constituido una herramienta de vida de los seres humanos y, por ende, su importancia ha llevado a su análisis tanto en áreas de la economía, física y otras de tal forma de perfeccionar su uso. Son enormes las inversiones que se han realizado, a nivel mundial, en su perfeccionamiento (carreteras, modelos de vehículo, seguridad vial, etc.) de tal forma de minimizar los riesgos de su uso y mejorar la eficiencia de su utilización. Por ello, no es de asombrar el que tanto estudios se realicen en el tema de tal forma de encontrar modelos que lo representen cada vez mejor de tal forma de simular su comportamiento lo más fielmente a su realidad. Por otra parte, debemos hacer hincapié no tan sólo en los aspectos positivos sino también en los negativos. Los vehículos han traído consigo problemas de contaminación, ruido, congestión, consumos energéticos y grandes tasas de accidentabilidad, entre otros problemas. En la situación local, Chile no está ajena a este problema siendo los más destacables la contaminación (Santiago de Chile, con una de las tasas más altas del mundo) y en lo referente a accidentes. Sobre lo expuesto, y junto a la escasez de recursos que permitan a Chile implementar instalaciones que permitan realizar estudios de campo en el tema, es que se justifica la realización de los **estudios necesarios para obtener un modelo de simulación el cual permita analizar los comportamientos dinámicos de un vehículo** de tal manera que pueda ser implementando en su versión simulada; constituyéndose, esto último, en el objetivo de este trabajo.

El tema de dinámica de vehículos ha sido abordado por muchos autores y este se basa en los fundamentos básicos de la mecánica. Nos encontramos, como primer intento mediante la mecánica clásica, con el modelos de rueda en su análisis de giro (Broenink, 1999) desde el punto de vista de velocidades angulares. Para un análisis de mayor amplitud se hace uso de los teoremas de Euler (Broenink, 2003) y de Newton (Johnson, 1984). Es fácil encontrar en ciertos textos análisis estáticos (Karamihis, 1997) y dinámicos (Huston, 1979) de un vehículo, pero dicho análisis es genérico y sólo desde un punto de vista longitudinal de movimiento.

Ampliando el estudio en el tema, encontramos que algunos investigadores se centran en el modelamiento cinemático de un móvil (Bidwell, 1970) haciendo referencia global al tema de la dinámica pero es fácil visualizar la interdependencia de ambos temas (Breedveld, 2000), principalmente lo que a control se refiere. Ahora bien, para el modelamiento de un automóvil es necesario insertarse en las investigaciones que se han realizado para vehículos de pasajeros o de cuatro ruedas (Sano, 1986), análisis que también se realiza en la robótica móvil (de Boer, 2002). En este último contexto, la dinámica de un vehículo contempla el exhaustivo análisis

de su comportamiento en movimiento lineal y en la tomadura de una curva (Ervin, Nisonger, Sayers, Gillespie & Fancher, 1983); constituyéndose éste último tema en el centro de la mayoría de las publicaciones en el tema. Un gran aporte han realizado todos aquellos autores que investigan en el tema con la finalidad de obtener ecuaciones para generar simuladores de coches con el objetivo final de simular el tráfico urbano (Félez, Romero & Cabanellas, 2007) o en aplicaciones como la realidad virtual (El-Gindy & Wong, 1987). Estos últimos han logrado modelos básicos, que aunque con bastantes restricciones, logran un acercamiento bastante aceptable a la realidad. Por otra parte, encontramos publicaciones muy detalladas en el análisis dinámico de vehículos (Ervin, Winkler, Bernard & Gupta, 1976) así como también muy reducidas en las cuales es muy difícil deducir su obtención. En general, cada autor expone su modelo con sus propias restricciones, ya sea considerando o no ciertas características del comportamiento del vehículo; por ejemplo, las vibraciones producto de frenar el vehículo (Ervin, MacAdam & Fancher, 1975), entre otras.

Al incorporarse el conocimiento de los multicuerpos, el enfoque de las investigaciones y desarrollo de modelos de vehículos se ha visto totalmente favorecido. Lo anterior, debido a que los sistemas modelados hasta antes de esta temática y su uso actual, se basaban exclusivamente en ecuaciones diferenciales y los cuales han seguido un camino diferente en su tratamiento computacional que esencialmente se reduce a la formulación, implementación y desarrollo del método de elementos finitos. Es así que los primeros análisis cinemáticos y dinámicos de mecanismos, descritos en los párrafos anteriores, se restringían a sistemas simples y formados por sólidos rígidos. A principios de los 70 se empezaron a incluir elementos flexibles de dichos mecanismos. De entre estos trabajos pueden destacarse los de Cuadrado et al. (1997) y de Boer (2002), que se caracterizaron por el desacoplamiento entre los movimientos como sólido rígido y los debidos a la deformación elástica de los elementos del sistema.

De lo anterior, en las dos últimas décadas ha ido adquiriendo mayor importancia una metodología de modelamiento cuya principal ventaja radica en su eficiencia en el análisis de sistemas acoplados pero estableciendo unos elementos de notación muy simples y generales aplicables a un sinnúmero de problemas cuya base es la transferencia de energías; ésta notación es llamada diagramas Bond Graph (Louca, Stein & Rideout). Esta fue introducida por Henry M. Paynter (1923-2002), profesor del MIT & UT Austin, quien la presentó en abril de 1959 concluyendo un periodo de alrededor de una década de depuración y uso en diversos problemas dinámicos. Posteriormente, Dean C. Karnopp, más tarde profesor de UC Davis, y Ronald C. Rosenberg, más tarde profesor de Michigan State University diseñan la primera herramienta computacional (ENPORT) que soporta simulaciones bajo modelos obtenidos mediante diagramas Bond Graph. Finalmente, Jan J. van Dixhoorn, profesor de la Universidad de Twente, NL y Jean U. Thomas profesor de Universidad de Waterloo, son los primeros en introducir Bond Graph en Europa. Estos pioneros en este campo y sus alumnos han sido los que han difundido estas ideas por el mundo. Por otra parte, Jan van Dixhoorn realiza un rápido prototipo de diagrama de bloques basado para el software TUTSIM el cual puede ser utilizado para ingresar diagramas causales simples de Bond Graph, el cual ha sido la base para crear, más tarde, nuevas herramientas para computadoras personales. Esto último sentó las bases para el desarrollo de la tan famosa herramienta computacional, basada en puertas Bond Graph, 20-Sim de la Universidad de Twente.

2. DISEÑO DEL MODELO

El estudio del modelo teórico básico para el movimiento lateral de un vehículo (Figura 1) se basa en el análisis de las fuerzas verticales que actúan sobre el móvil. Dichas fuerzas corresponden a

las fuerzas ejercidas por las ruedas sobre el eje de las misma y las fuerzas actuantes desde el eje, de carga m e inercia de rotación j , hacia la carga suspendida.

Las ruedas son representadas por una fuerza tipo resorte, de constante K_1 , para cada un de ellas y que reflejan el comportamiento del neumático sobre la llanta y, por ende, sobre el eje de las ruedas. En este modelo simplificado se considera a las llantas y el eje como un solo sólido rígido. A partir de los ejes y la carga M , e inercia de rotación J , se considera que existe una amortiguación, de constante R , y los resortes de constante K . Las velocidades, producto del contacto de las ruedas con la calzada son V_0 para las ruedas del lado izquierdo y V_1 para las del lado derecho. Consideraremos, como supuesto de simplificación, que el par de ruedas de cada lado sufren en mismo efecto en el mismo instante de tiempo.

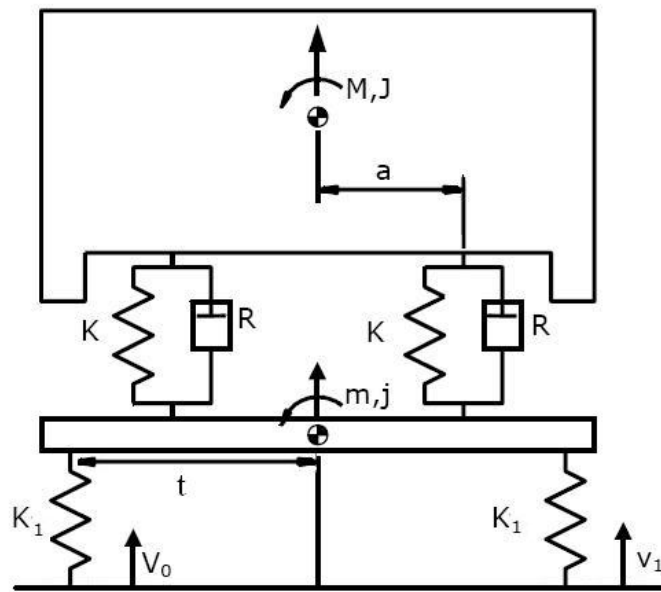


Figura 1. Modelo transversal del vehículo.

Debemos destacar que en el comportamiento del vehículo, en su modelo transversal, sólo considera las fuerzas verticales para el análisis puesto que el estudio de las fuerzas longitudinales se realiza sobre la base de un movimiento longitudinal.

Para comenzar, modelaremos en 20-Sim, primeramente, el eje del vehículo (Figura 2).

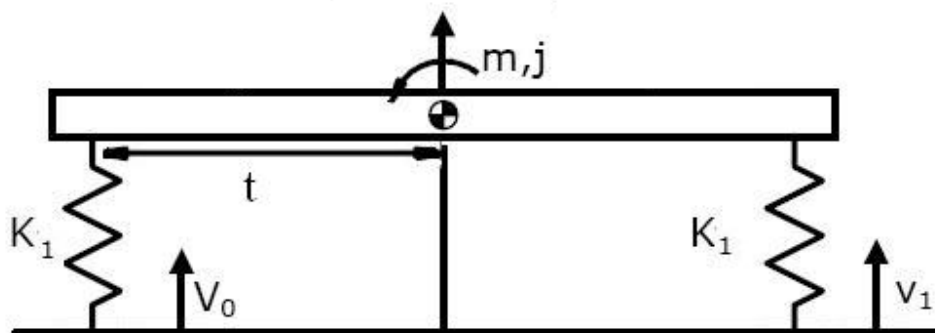


Figura 2. Eje del vehículo (vista transversal).

Para ello, determinamos su diagrama Bond Graph (Figura 3) y luego procederemos a su implementación en 20-Sim (Figura 4) de tal forma de realizar las simulaciones de comportamiento. Como nuestro objetivo es el obtener las ecuaciones matemáticas derivadas del modelo se procede a aplicar la mecánica definida por la técnica Bond Graph para tal efecto.

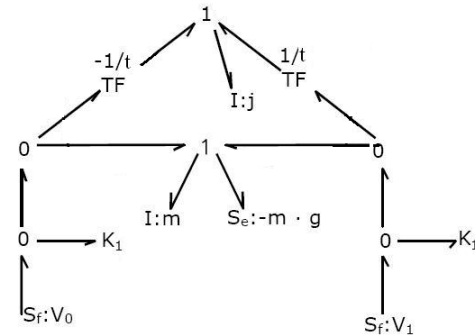


Figura 3. Diagrama Bond Graph del eje del vehículo.

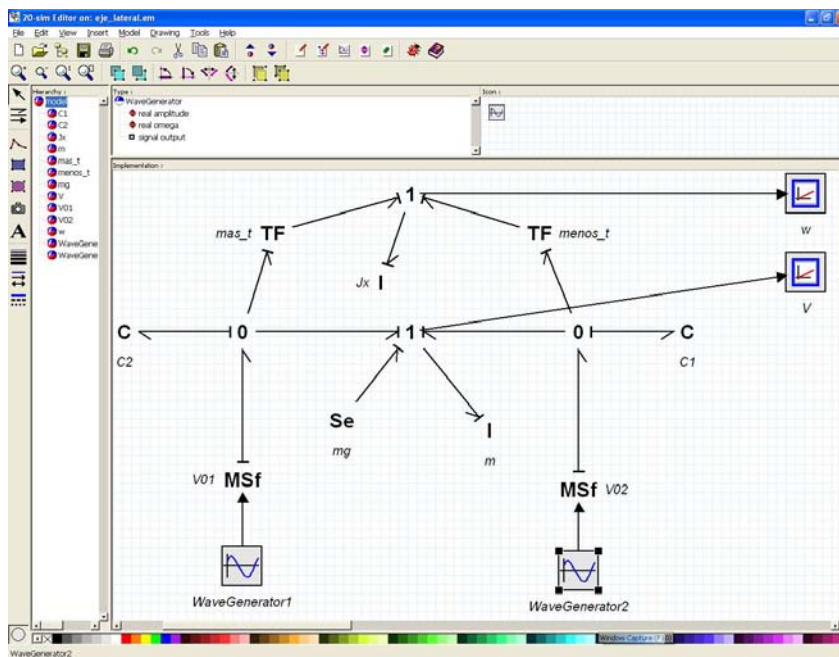


Figura 4. Implementación 20-Sim de eje del vehículo (vista transversal).

Analizando el diagrama Bond Graph anterior se obtiene el sistema de ecuaciones de éste modelo:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_1 & K_1 \\ 0 & 0 & -K_1 t & K_1 t \\ -\frac{1}{m} & \frac{1}{j} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & -\frac{1}{j} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m \cdot g \\ 0 \\ V_0 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

Donde

- p_1 Cantidad de movimiento en las ruedas del lado izquierdo
- p_2 Cantidad de movimiento de las ruedas del lado derecho
- x_1 Desplazamiento vertical del eje en su lado izquierdo
- x_2 Desplazamiento vertical del eje en su lado derecho

A partir de esto podemos simular mediante utilizando el simulador mencionado de tal forma de tener noción con respecto al comportamiento del vehículo bajo dos condiciones (a) sin obstáculo en la calzada (Figura 5) y (b) un obstáculo en que afecta a las ruedas del lado izquierdo (Figura 6); es decir, V_0 no igual a cero.

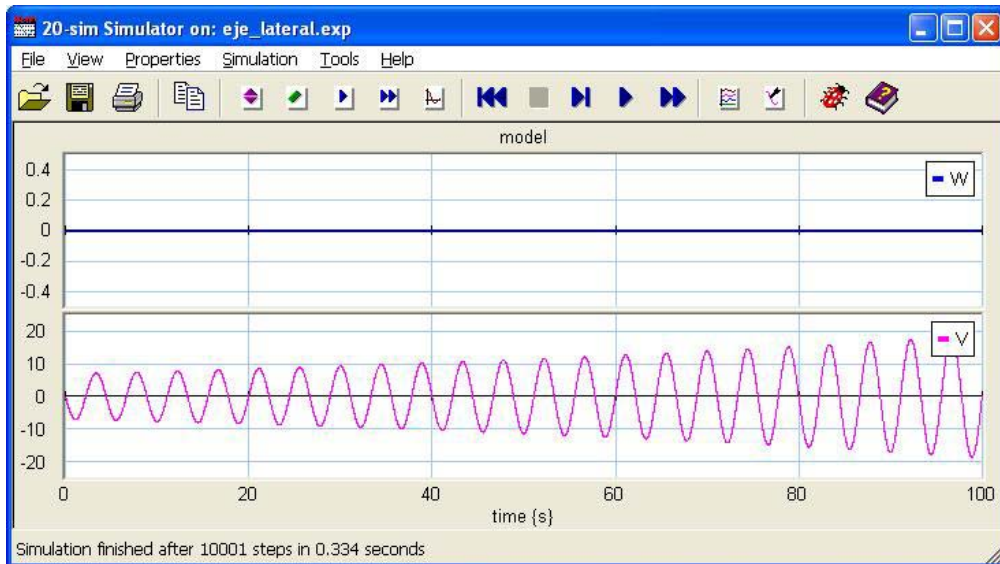


Figura 5. Resultados de la simulación con V_0 y V_1 nulas.

En esta última gráfica podemos ver que la velocidad resultante sobre el eje, V , va en incremento y de forma oscilatoria debido al efecto del peso sobre los resortes. Para la velocidad angular en el eje, W , tenemos que su valor es cero; por lo que, ciertamente, esto es verificable en un vehículo moviéndose longitudinalmente y sin ningún obstáculo que altere el movimiento del eje.

Para el caso de encontrarnos con un obstáculo (Figura 6) se puede ver que W será distinto a cero; es decir, el vehículo comienza a oscilar, situación que sucede cuando las ruedas pasan por una calzada con defectos. También podemos constatar que la velocidad del eje (de arriba a abajo) hace que el móvil oscile pero no armónicamente, puesto que V_0 ha sido insertada como valor exógeno no constante.

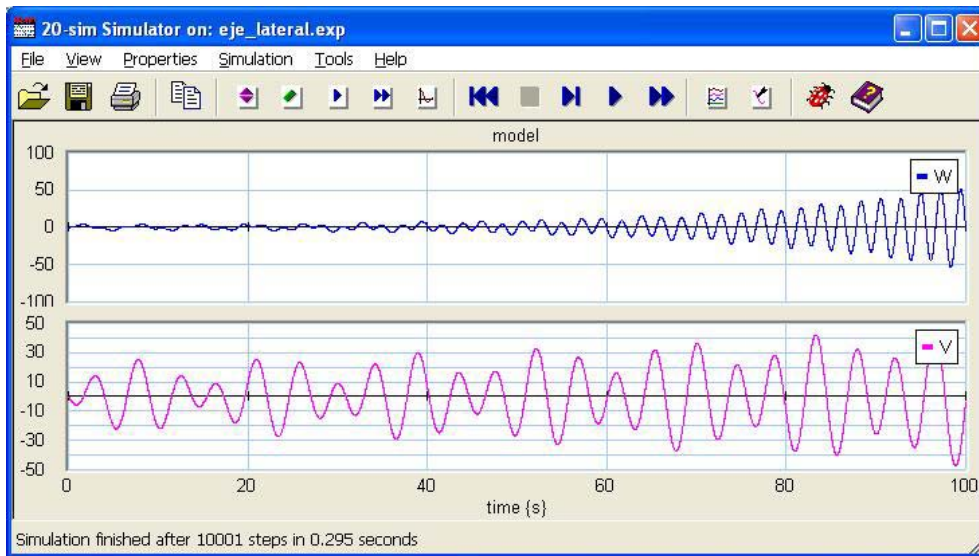


Figura 6. Comportamiento lateral si V_0 es distinta de cero.

Por lo analizado podemos constatar que el modelo utilizado para éste análisis particular es válido en sus conclusiones puesto que refleja lo que sucede en el contexto real. Ahora procederemos a obtener el modelo conjunto, chasis, eje y ruedas. Aquí determinamos el modelo Bond Graph (Figura 7) y a partir de éste su sistema de ecuaciones de estado. Posteriormente, la simulación en 20-Sim (Figura 8).

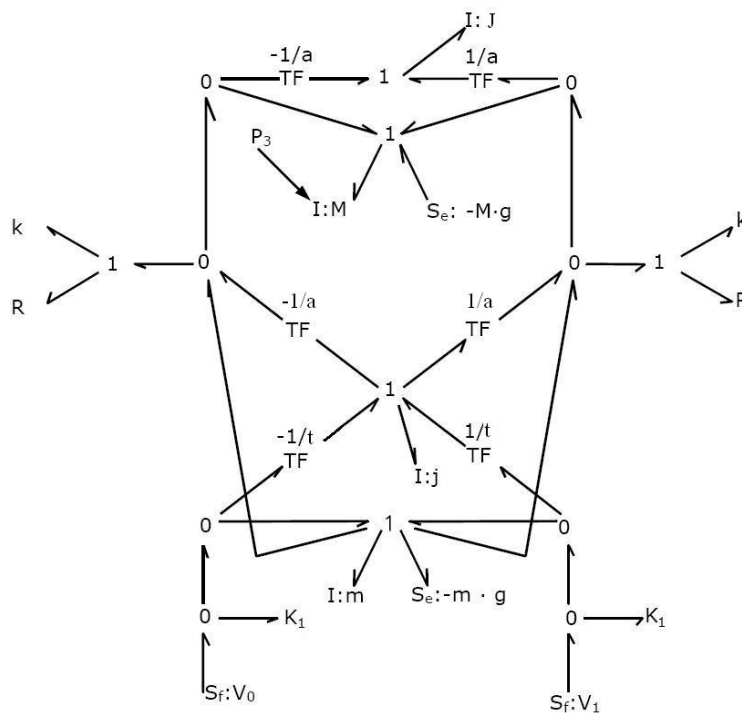


Figura 7. Modelo completo Bond Graph del vehículo.

A partir del análisis de éste grafo podemos obtener las ecuaciones del modelo. Dichas ecuaciones son:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\frac{R}{m} & 0 & 2\frac{R}{M} & 0 & K_1 & K_1 & -K & -K \\ 0 & -2\frac{R}{j}a^2 & 0 & 2\frac{R}{J}a^2 & -K_1t & K_1t & K \cdot a & K \cdot a \\ 2\frac{R}{m} & 0 & -2\frac{R}{M} & 0 & 0 & 0 & K & K \\ 0 & 2\frac{R}{j}a^2 & 0 & -2\frac{R}{J}a^2 & 0 & 0 & -K \cdot a & -K \cdot a \\ -\frac{1}{m} & \frac{1}{j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & -\frac{1}{j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & -\frac{1}{j}a & -\frac{1}{M} & \frac{1}{J}a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{j}a & -\frac{1}{M} & -\frac{1}{J}a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m \cdot g \\ 0 \\ -M \cdot g \\ 0 \\ V_0 \\ V_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con p_1 en m , p_2 en j , p_3 en M , p_4 en J , x_1 en K_1 (rueda izquierda), x_2 en K_1 (rueda derecha), x_3 en K (muelle del amortiguador izquierdo) y x_4 en K (muelle del amortiguador derecho) correspondientes a la carga del chasis.

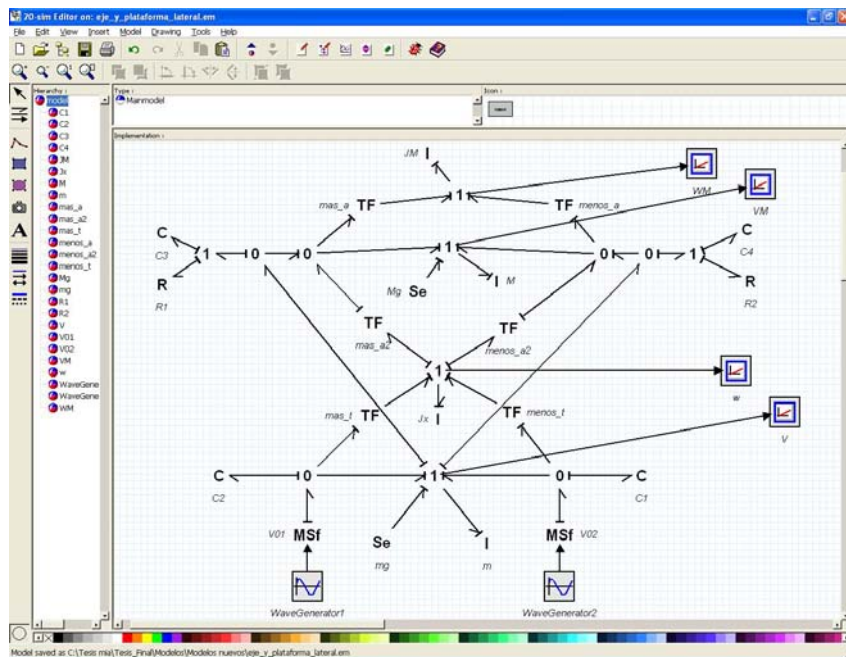


Figura 8. Implementación Bond Graph de modelo transversal de vehículo en 20-Sim.

Las simulaciones del modelo general se plantearon desde dos perspectivas, a lo igual que en el caso anterior, sin baches en la calzada (Figura 9) y con la presencia de estos (Figura 10). A diferencia del caso anterior, aquí debemos graficar la simulación del efecto sobre el eje, V y W , y el efecto sobre el chasis, VM y WM ; es decir, sobre las velocidades verticales y angulares para ambos sólidos.

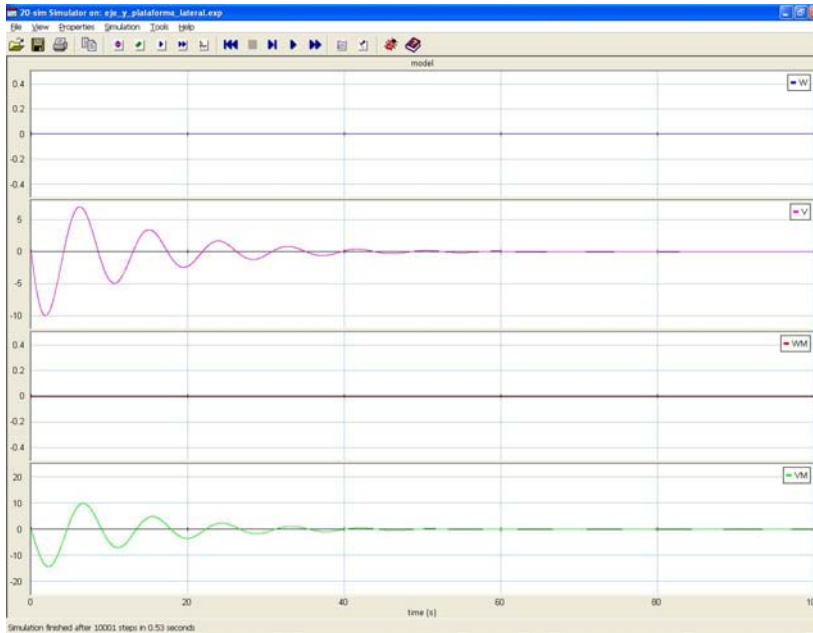


Figura 9. Simulación sin baches en la calzada.

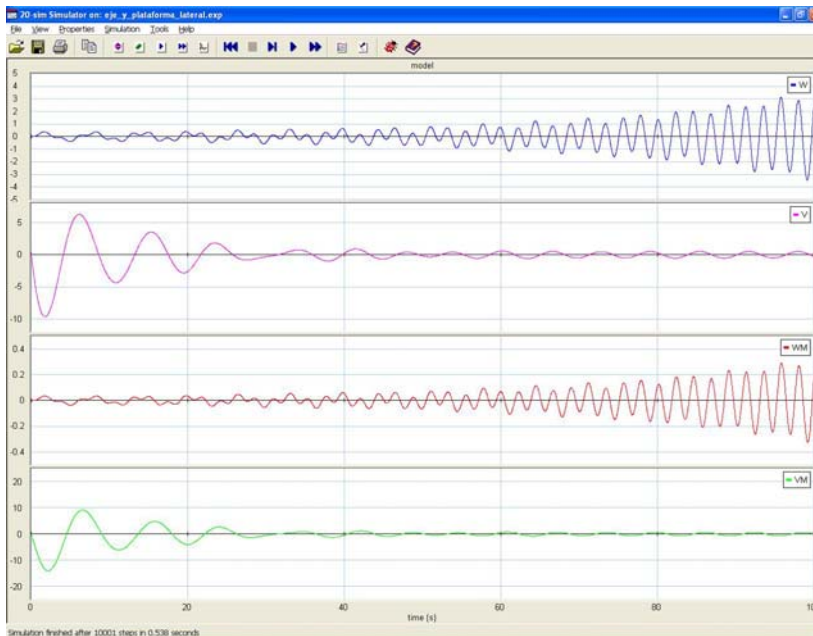


Figura 10. Simulación cuando existe obstáculo en la calzada sobre las ruedas izquierdas.

El análisis de las simulaciones nos muestra que sin baches en las ruedas, tenemos que la velocidad angular, W , tanto en el eje como del chasis, WM , son nulas no así sus velocidades en el eje Z . Esta última tiende a cero al transcurrir los segundos; es decir, estabilización de los mismos. Además, la velocidad del chasis, VM , es menor que la del eje, V . Aunque no se aprecia con claridad, las velocidades lineales, tanto del eje como del chasis, aumentan levemente del caso sin obstáculo en el camino a cuando lo hay. Debemos indicar que el bache de prueba ha sido de baja velocidad (1 m/s).

3. CONCLUSIONES

Bond Graph permite, a partir de supuestos básicos de mecánica, obtener un modelo adecuado para realizar simulaciones que ayudan a los análisis de resultados que con otras herramientas son de mayor nivel de dificultad; por ejemplo, con la mecánica clásica. Esta metodología, además, permite integrar diferentes subsistemas del vehículo, aunque estos sean de diferentes orígenes. Por otra parte, su diagramación permite la rápida obtención de las ecuaciones que pueden ser implementadas en cualquier otra herramienta, ya sea de software o de otra naturaleza.

En lo referente al software utilizado, 20-Sim, este producto es una herramienta que nos permite, desde los pasos iniciales, ir probando cada componente del modelo a obtener, todo ello favorecido por la orientación a objetos que poseen los diagramas Bond Graph. 20-Sim es absolutamente versátil a poder combinar diferentes elementos gráficos tales como diagramas de bloques, ecuaciones ya definidas, y diagramas Bond Graph que facilitan la implementación de mayores análisis del modelo final obtenido.

En lo referente al modelo propiamente tal, este permite los análisis elementales del comportamiento lateral de un móvil cuyas variables de influencia son esenciales en el análisis del comportamiento del mismo al tomar una curva, ya sea en carretera como en un espacio cerrado para el caso de un robot móvil dentro de una construcción determinada. Dentro de los análisis realizados se puede vislumbrar directamente el efecto que produce un bache sobre las ruedas de alguno de los costados del móvil así como también el efecto que se produce al ladearse la carga que transporta dicho vehículo. Esto último es el caso de un camión cuya carga se inclina hacia uno de sus lados, por lo general hacia el interior de una curva, o en el caso de un vehículo de pasajeros cuando estos toman asiento en uno de sus lados.

Las proyecciones futuras de este modelo es su implementación considerando otras variables en el mismo e incorporar otros movimientos, como el longitudinal. El comportamiento de un móvil, bajo esta herramienta, es de mayor comprensión y amplía la visión de análisis del modelo del mismo. Su orientación a objetos permite reutilizar este modelo básico de tal forma de elaborar un modelo general de mayor complejidad, paso siguiente a este trabajo.

4. REFERENCIAS

- Bidwell, J.B. (1970). "State of the art Vehicle control and road holding". SAE paper N° 700366.
- Breedveld, P.C. (2000). "An alternative model for static and dynamic friction in dynamic system simulation". Preprints 1st IFAC-Conference on Mechatronic systems, Darmstadt, Germany, Vol. 2, pp. 717-722.
- Broenink, J.F. (1999). "Introduction to Physical Systems Modelling with Bond Graph". University of Twente, Dept. EE.
- Broenink, J.F. (2003). "Tutorial Introduction to 20-Sim 3.6". Adapted to 3.6 by Peter Breedveld, University of Twente, EE Department, Enschede, Netherlands.
- Chiang, L. (1999). "Análisis Dinámico de Sistemas Mecánicos", Alfaomega.
- Cuadrado, J., et al. (1997). "Modeling and Solution Methods for Efficient Real-Time Simulation of Multibody Dynamics", Multibody System Dynamics, Vol. 1, p.259.
- de Boer, G.R. (2002). "A physical multi-body car model using 3D (screw) bond graph". M.Sc. Thesis, Universiteit Twente, Netherlands.
- El-Gindy, M.; Wong, J.Y. (1987). "A comparison of various computer simulation models for predicting the directional response of articulated vehicles". Vehicle System Dynamics, 16, pp. 249-268.
- Ervin, R.D.; MacAdam, C.C.; Fancher, P.S. (1975). "The longitudinal traction characteristics of truck tires as measured on dry pavements". Report # UM-HSRI-PF-75-3, Highway Safety Research Institute, University of Michigan, February.
- Ervin, R.D.; Winkler, C.B.; Bernard, J.E.; Gupta, R.K. (1976). "Effects of tire properties on truck and bus handling". Final Report, Contract N° DOT-HS-4-00943, Highway Safety Research Institute, University of Michigan, December.
- Ervin, R.D.; Nisonger, R.L.; Sayers, M.; Gillespie, T.D.; Fancher, P.S. (1983). "Influence of size and weight variables on the stability and control properties of heavy trucks". Final Report, Contract N° FH-11-9577, UMTRI Report N° UMTRI-83-10, March.
- Félez, J.; Maroto, J.; Romero G. and Cabanellas, J. (2007). "A full driving simulator of urban traffic including traffic accidents". Simulation, Vol. 83, N° 5, May, pp. 415-432.
- Huston, J.C. and Johnson, D.B. (1979). "Relative significance of parameters affecting lateral stability of articulated recreational vehicles". SAE trans., 83, 699.
- Johnson, D.B.; Huston, J.C. (1984). "Nonlinear lateral stability analysis of road vehicles using Liapunov's second method". SAE paper N° 841507.
- Karamihas, S.M.; Winkler, C.B. (1997). "Ride performance of heavy-vehicle suspensions: Data tables". SAE paper N° 973208.
- LeBlane, P.A.; El-Gindy, M. and Woodrooffe, J.H. (1989). "Self-steering axles: theory and practice". SAE paper N° 891633.

Louca, L.S.; Stein, J.L. and Rideout, D.G. (2001) "Generating Proper Integrated Dynamic Models for Vehicle Mobility Using a Bond Graph Formulation". Proceeding of the 2001 International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, Phoenix.

Sano, S., Furukawa, Y. and Shiraishi, S. (1986). "Four-wheel steering system with rear wheel steer angle controlled as a function of steering wheel angle". SAE paper N° 860625.